Thm : T.V.I

Rappel : si $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a;b] \\ f(a) \times f(b) \leq 0 \end{cases}$

alors : $\exists c \in [a;b]$; $f(c)=0$

Ex : 1) Montrer que l'équation :

$$2x^3 - 5x^2 - 3 = 0$$

admet au moins une solution dans l'intervalle : $[\frac{5}{2} ; 3]$

Ex : 2) $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$; $I =]-\frac{1}{2} ; +\infty[$

1°/ calculer : $J = f(I)$

2°/ Mq : f réalise une bijection f^{-1} de I sur J (càd : admet une fct réciproque)

3°/ calculer l'expression de f^{-1}

4°/ Mq f^{-1} est continue et strictement monotone sur J.

5°/ Mq l'équation : $f(x) = x^2$ admet une solution dans $[-1 ; 0]$.

(→ Indication : considérer : $g(x) = f(x) - x^2$)

Dérivabilité :

Ex : 3) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

1°/ Mq : $f'(2) = 10$

2°/ Donner l'équation de la tangente (T) au pt $A(2, f(2))$.

Ex : 4) $f(x) = x|x-1|$; $x \in \mathbb{R}$

1°/ Calculer : $f'_d(1)$ et $f'_g(1)$.

2°/ En déduire que f n'est pas dérivable au pt : $x_0 = 1$

3°/ Donner une interprétation géométrique du résultat.

4°/ Donner les équations des demi-tangentes au pt : $A(1, f(1))$

Ex : 5) Calculer $f'(x)$; $x \in I$ dans chaque cas :

1°/ $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 5x + \frac{2}{3}$, $I =]0, +\infty[$

2°/ $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$; $I =]0, +\infty[$

3°/ $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}$; $I =]2, +\infty[$

4°/ $f(x) = 1 - 2x + \frac{3}{5x-10}$; $I =]-\infty, 2[$

Ex : 6) $f(x) = x + 3\sqrt{x^2-1}$

1°/ Calculer D_f

2°/ Donner le domaine de déf de f'.

3°/ Determiner f'.

4°/ vérifier que : $f''(x) = \frac{-3}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$

Ex : 7) Etudier la variation de f :

1°/ $f(x) = \sqrt{x^2+2}$ 2°/ $f(x) = 5x + 1 + \frac{1}{x}$

3°/ $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ 4°/ $f(x) = \frac{2x-3}{x-5}$

Ex : 8) : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Mq $(\mathcal{C}_f)$ admet un pt d'inflexion A. et determiner ses coordonnées.

Ex : 9) $f(x) = \sqrt{x+2}$

1°/ Calculer D_f et $D_{f'}$

2°/ Mq f n'est pas dérivable à droite du pt : $x_0 = -2$ et donner une interprétation géométrique.

Lycée Laymou
Niveau : 2ème BAC Pro
2019 - 2020

Correction de la série n°1

Ex 1 : on pose : $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3$

f est une fct **cont** sur $[\frac{5}{2} ; 3]$

on a : $f(\frac{5}{2}) = 2 \times \frac{5^3}{2^3} - 5 \times \frac{5^2}{2^2} - 3$

$= \frac{5^3}{2^2} - \frac{5^3}{2^2} - 3 = -3 < 0$

$f(3) = 2 \times 3^3 - 5 \times 3^2 - 3 = 2 \times 27 - 45 - 3$

$= 54 - 48 > 0$ donc : $\boxed{f(\frac{5}{2}) \times f(3) \leq 0}$

et d'après le thm des valeurs intermédiaires :

$\exists c \in [\frac{5}{2} ; 3]$ / $f(c) = 0$

c-à-d l'éq $2x^3 - 5x^2 - 3 = 0$ admet au moins une solution dans $[\frac{5}{2} ; 3]$.

Ex 2 : $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$; $I =]-\frac{1}{2} ; +\infty[$

1°) f est continue sur $D_f =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$

donc en particulier sur $I =]-\frac{1}{2} ; +\infty[$

ainsi : $J = f(I) = f(]-\frac{1}{2} ; +\infty[)$

f est ↘ car : $f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{(2x+1)^2} < 0$

donc : $J =]\lim_{+\infty} f ; \lim_{-\frac{1}{2}^+} f[$

on a : $\lim_{+\infty} f = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x} = \boxed{\frac{1}{2}}$

et $\lim_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ >}} f = "\frac{3/2}{0^+}" = +\infty$ donc :

$$\boxed{J =]\frac{1}{2} ; +\infty[}$$

2°) f est continue et strictement ↘ :
déjà prouver dans 1°)
donc : f admet une fct réciproque

3°) Calcul de f^{-1}.

on utilise l'éq : $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$

soit $x \in J$ on cherche $y \in I$ tqs :

$y = f^{-1}(x)$ ceci est éq à :

$f(y) = x \Leftrightarrow \frac{y+1}{2y+1} = x$

$\Leftrightarrow y(1 - 2x) = x - 1$

$\Leftrightarrow y = \frac{x-1}{1-2x}$

donc : $(\forall x \in J)$; $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{1-2x}$

4°) f^{-1} est continue par définition

f et f^{-1} ont la même monotonie donc f^{-1} est strictement ↘ sur J.

5°) on pose : $g(x) = f(x) - x^2$

⊛ g est **continue** sur $[-1 ; 0]$

$g(-1) = f(-1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$

$g(0) = f(0) - 0 = 1 > 0$

⊛ $g(-1) \times g(0) \leq 0$

⇒ d'après T.V.I, l'éq $g(x) = 0$ c-à-d $f(x) = x^2$ admet au moins une solution dans $[-1 ; 0]$.

Ex 3 : $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

1°) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2} = "\frac{0}{0}"$ (F.I)

on fait une division :

$3x^2 - 2x - 8$	$x - 2$
$-3x^2 + 6x$	$3x + 4$
$4x - 8$	
$-4x + 8$	
$0 \quad 0$	

donc : $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{(x-2)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{(3x+4)}{1} = 6 + 4 = \boxed{10}$

2°) (T) : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$y = 10(x - 2) + 9$

$\Rightarrow \boxed{(T) : y = 10x - 11}$

L'éq de la tg à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au pt : $A(2 ; 9)$

EX : 4 déjà traité

EX : 5 " "

EX : 6 " "

EX : 7 " "

EX : 8 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

f est deux fois déri sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 6x$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

donc : $f''(x) = 0 \iff x = 1$

x		1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$

f'' s'annule en $x_0 = 1$ en changeant de signe donc le pt $(1, f(1))$ est un pt d'inflexion ; avec : $\boxed{f(1) = 2}$

EX : 9 $f(x) = \sqrt{x+2}$

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in D_f$ ssi $x + 2 \geq 0$

donc : $\boxed{D_f = [-2; +\infty[}$

et $x \in D_{f'}$ ssi $x + 2 > 0$ donc :

$\boxed{D_{f'} =]-2; +\infty[}$

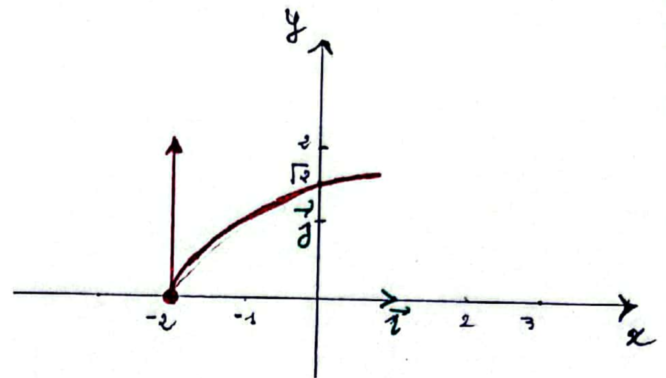
2°) on a : $\dfrac{f(x) - f(-2)}{x-(-2)} = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x+2}$ pour tout $x > -2$.

et $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+2} = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

donc : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(-2)}{x-(-2)} = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = "\dfrac{1}{0^+}" = \boxed{+\infty}$

la limite est infinie ; donc f n'est pas dérivable à droite du pt $x_0 = -2$.

Interprétation géo : $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tg dirigé par $\boxed{\vec{j}}$ à droite du point d'abscisse $x_0 = -2$



Complément : Interprétation de la non dérivabilité :

si $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$

$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente dirigée par $\pm\vec{j}$ au pt $x_0^{\pm}$ selon les cas suivants :

situation :	dirigée par :	dessin
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \left(\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\right) = +\infty$	$+\vec{j}$	
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \left(\dfrac{\cdots}{\cdots}\right) = -\infty$	$-\vec{j}$	
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \left(\dfrac{\cdots}{\cdots}\right) = +\infty$	$-\vec{j}$	
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \left(\dfrac{\cdots}{\cdots}\right) = -\infty$	$+\vec{j}$	

↳ tableau de signe

→ par exple :

$\lim\limits_{x \to x_0^{\boxed{-}}} \left(\dfrac{f(\,)-f(\,)}{\cdots}\right) = \boxed{+}\infty$

"deux signe ≠" $(-)\times(+) = -$

donc la dem-tg est dirigée par $-\vec{j}$

②